

22. Спектр самосопряженного компактного оператора, расположение его на вещественной прямой, границы спектра, ортогональность собственных функций. Теорема о наличии собственного значения, равного по модулю норме оператора.

↓ $\downarrow A \in L(H \rightarrow H)$, H -ил., $A = A^*$. Тогда спектр A лежит на вещ. прямой

▲ Пусть $\alpha = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, при $\beta \neq 0$ явл-ся рез. т. Введем оп-р $A_\alpha = A - \alpha E$ — самосопрот. (т.к. $A = A^*$, αE — сам. сопрот.)

$$\begin{aligned} & \| (A - \alpha E)x \|^2 = \| A - \alpha E = A - \alpha E - i\beta E = A_\alpha - i\beta E \|^2 = \\ & = ((A_\alpha - i\beta E)x, (A_\alpha - i\beta E)x) = (A_\alpha x, i\beta x) + (i\beta x, A_\alpha x) = i\beta (A_\alpha x, x) - i\beta (A_\alpha x, x) = 0 \\ & \Rightarrow \| (A - \alpha E)x \|^2 \geq \beta^2 \|x\|^2, \forall x \in H \Rightarrow \ker(A - \alpha E) = \{0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (A - \alpha E) \text{ — мин. опр., определен на всем пр-ве } H \Rightarrow \text{ по } \downarrow \Rightarrow \\ & \Rightarrow H = R(A - \alpha E) \oplus \ker(A^* - \alpha^* E) = \{A = A^*\} = R(A - \alpha E) \oplus \ker(A - \alpha E) \\ & \Rightarrow H = R(A - \alpha E) \end{aligned}$$

(Известно, что if оп-р B — мин. опр., $R(B) = H$ и $\|Bx\| \geq k\|x\|$, $k > 0$, то B — обратимый) $\Rightarrow (A - \alpha E)$ обратимый $\Rightarrow A$ — рез. т. $\Rightarrow$ весь спектр лежит на вещ. прямой. ■

↓ $\downarrow A \in L(H \rightarrow H)$, H -ил., $A = A^*$. Тогда if $Ax = \mu x$, $Ay = \mu y$, $A \neq \mu$, то $x \perp y$.

$$\begin{aligned} & \mu \in \mathbb{R} \text{ (в силу пред. } \downarrow) \\ & (Ax, y) = (Ax, y) = A(x, y) \\ & (Ax, y) = (x, A^*y) = \mu (x, y) = (x, Ay) = (x, \mu y) = \mu (x, y) \\ & \Rightarrow \text{вычитая из } 1 \text{ и } 2 \Rightarrow (A - \mu)(x, y) = 0 \Rightarrow \text{if } A \neq \mu \Rightarrow (x, y) = 0 \end{aligned}$$

Введем $m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x)$, $M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$, $m \leq 0 \leq M$ (H — бесконечномерное, возьмем о.н.с. $\{e_k\}_{k=1}^\infty$, $(e_k, e_j) = \delta_{kj}$. Известно, что $e_k \rightarrow 0$).

Здесь и далее считаем, что A — компактный $\Rightarrow$ считаем, что $A \in L(H \rightarrow H) \Rightarrow$ по $\downarrow \Rightarrow A$ — вполне непр.

Тогда $A e_k \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ (в силу вполне непр-ти) $\Rightarrow 0 \in [m, M]$

Лемма $\downarrow A: H \rightarrow H$, A — вполне непр., $A = A^*$. Тогда спектр оп-ра A лежит на отрезке $[m, M]$

▲ $Ax = \lambda x$; $(Ax, x) = A(x, x) = \lambda \|x\|^2 = \lambda$ — значит квадратич. ф-ция совпадает с m спектра. If $\min \lambda \geq m$, $\max \lambda \leq M \Rightarrow$ ст. ■

Т $A: H \rightarrow H$, H -ил, A - вполне кепр, $A=A^*$ Тогда $\exists$ M : $|A| = \|A\|$

$A=A^* \Rightarrow \forall \{x\} \Rightarrow \|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$

По пред. Т, либо $\|A\|=M$, либо $\|A\|=-m$. Т, g /определенности, $\|A\| \in M$. Покажем, что M - с.зн.

$M = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \|A\| \Rightarrow \exists$ посл-ть $\{x_n\}: \|x_n\|=1, (Ax_n, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M$

Выберем $\{x_{nk}\}$ - с.зн. п/посл-ть.

$\| (A - ME) x_{nk} \|^2 = \| Ax_{nk} \|^2 + M^2 \| x_{nk} \|^2 - 2 \operatorname{Re} (Ax_{nk}, x_{nk}) \cdot M \Leftrightarrow$
 $\quad \quad \quad \rightarrow \|Ax\|^2 \quad \quad \rightarrow 1 \quad \quad \quad \rightarrow M$

$\Leftrightarrow \|Ax\|^2 - M^2 \leq \{ M^2 = \|A\|^2, \|Ax\|^2 \leq \|A\|^2 \text{ при } \|x\|=1 \} \leq 0$, но это не мб:
 $\| (A - ME) x_{nk} \|^2 \leq 0 \Rightarrow \| (A - ME) x_{nk} \|^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$
 $\quad \quad \quad \rightarrow x$

$\|x\|=1$ (т.к. $\|x_{nk}\|=1$), с.зн. по $\|\cdot\|$, переходим к пределу $\Rightarrow$
 $\Rightarrow Ax - Mx = 0 \Leftrightarrow Ax = Mx \Rightarrow M$ - с.зн. $\Rightarrow \exists A=M: \|M\|=\|A\|$